数理解析研究所講究録
1064 巻 1998 年 1-5

Volterra と H.J.Smithの論文に見られる、その導関数がRiemann積分可能でない関数の古典例について

小柴　洋一 (Yôichi KOSHIBA) (鹿児島大　理)

1998 年 5 月 28 日

1　原始関数と不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数と不定積分の違いを考えてみます。定義域として閉区間 $[a,b]$ をまず決めておきます。
$a\leqq x\leqq b$ である任意の x について $F'(x)=f(x)$ であるとき $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよびます。
$a\leqq x\leqq b$ である任意の x について $f(x)$ が閉区間 $[a,x]$ で Riemann 積分可能であるとき関数 $\int_a^x f(t)dt$ を $f(x)$ の不定積分とよぶことにします。
いろいろな場合や例が有り得ます。ちょっと列挙してみますと

1. 関数 $f(x)$ が連続ならば学生の text に書いてある通りである。
2. 原始関数は存在しないが Riemann 積分可能な例
   第 1 種不連続点をもつ関数で Riemann 積分可能である関数 $f(x)$ がその例。
3. 原始関数も不定積分 (Riemann 積分可能) も存在する場合このとき $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ となるだけである。
4. 原始関数も不定積分も無い場合。この場合は例がいっぱいあり過ぎて (Dirichret 関数) ここではこれ以上考えません
5. 残った場合は $f(x)$ の原始関数は存在するが $f(x)$ が Riemann 積分可能でない場合です。このような例が存在するかどうかがこの題目の問題設定でした。

5. の場合に Volterra の古典例に話が行くのです。その前に少し準備。

2 一般Cantor集合(またはHarnack集合)

正数列 $\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$ からできる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x_n$ が収束していてその総和が l とする。閉区間 $[a,b]$ があって更に $l < b-a$ と仮定する。まず $[a,b]$ の中央から長さ x_1 の開区間 $G_{1,1}$ を取り去る。つぎに残った2個の同じ長さの閉区間の中央からそれぞれ x_2 の長さの開区間 $G_{2,1}, G_{2,2}$ を取り去る。つぎに残った 2^2 個の同じ長さの閉区間の中央からそれぞれ長さ x_3 の開区間 $G_{3,1}, G_{3,2}, G_{3,3}, G_{3,4}$ を取り去る。
以下同様にくり返せば完全不連結(totally disconnected)で至る所疎(nowhere dense)である集合 $C = [a,b] - \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} G_{i,j}$ が得られる。この集合 C を一般Cantor集合(またはHarnack集合)とよぶ。
$\mu(C) = b-a-l$. ここで $\mu(C)$ は C の Lebesgue 測度。Lebesgue 測度といっても長さの総和の簡単な引き算。開区間 $G_{i,j} = (\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$ を余区間とよぶ。
$\mu(C)$ が0でなく正であることが後で注目されます。

3 Volterraの例

関数 $f(x)$ が原始関数 $F(x)$ をもち、$[a,b]$ で Riemann 積分可能でない例を与えたのは Volterra(1860-1940) が最初でした(文献 Volterra [1] 1881年)。
閉区間 $[\alpha,\beta]$ と正定数 $\gamma(<\frac{\beta-\alpha}{2})$ があるとする。$[\alpha,\beta]$ を定義域とする関数 $F_{[\alpha,\beta]}(x)$ を次のように決める。

$$F_{[\alpha,\beta]}(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^2 \sin\frac{1}{x-\alpha} & \alpha < x < \alpha+\gamma \\ \gamma^2 \sin\frac{1}{\gamma} & \alpha+\gamma \leqq x \leqq \beta-\gamma \\ -(x-\beta)^2 \sin\frac{1}{x-\beta} & \beta-\gamma < x < \beta \end{cases}$$

$F_{[\alpha,\beta]}(x)$ の導関数は簡単な計算から解るように $x=\alpha, x=\beta$ でのみ第2種の不連続点をもち中の開区間 (α,β) では連続です。

閉区間 $[a,b]$ の一般 Cantor 集合 $C = [a,b] - \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} G_{i,j}$ が与えられたとき、つぎの関数 $F(x)$ を定義します。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ F_{[(\alpha_{i,j},\beta_{i,j})]}(x) & x \in G_{i,j} \end{cases}$$

開区間 $G_{i,j}=(\alpha_{i,j},\beta_{i,j})$ は (i,j) が異なれば互いに素（共通部分が空）です。
$G_{i,j}$ によって γ(本当は論理としては $\gamma_{i,j}$ と書くべきですが省略) を次のようにきめる。
方程式

$$\tan x=\frac{x}{2}, x>0$$

の全ての根を $x_1, x_2, \cdots (0<x_1<x_2<\cdots)$ とします。

$$\gamma=\sup\left\{\frac{1}{x_n}|\frac{b_{i,j}-a_{i,j}}{2}>\frac{1}{x_n}\right\}$$

$F(x)$ は閉区間 $[a,b]$ の任意の点で微分可能で導関数 $f(x)$ を持ちます。
$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で有界。
この関数 $f(x)$ の連続でない点の集合が C、連続点の集合が $\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{i-1}}G_{i,j}$ になっています。以下その証明。
$x\in C$ のとき、正数 δ がどんなに小さい正数であっても、$(\alpha,\beta)\subseteq(x,x+\delta), C\cap(\alpha,\beta)=\emptyset, \alpha\in C$ なる開区間 (α,β) があるのだから、自然数 n を十分大きくとって、$(2n\pi+\pi)^{-1}<(2n\pi)^{-1}<\gamma$ とすると $F'(\alpha+(2n\pi+\pi)^{-1})=2, F'(\alpha+(2n\pi)^{-1})=-2$. よって $\lim_{h\to 0}F'(x)$ は存在しえないから F' は C の点では不連続である。
点 x がある (i,j) について $x\in G_{i,j}$ ならばこのときは関数 $F_{[\alpha,\beta]}(x)$ の作り方から点 x で連続なことが解る。
Volterra は文献 Volterra [1] の冒頭で文献 Riemann [6] を引用しています。そこで現代の用語でいえば　ある関数が Riemann 積分可能ならばその不連続の集合が Lebesgue 零集合をなす、ということを述べています。文献 Riemann [6] の 5 節.Bedingungen der Möglichkeit eines Integrals の部分を指しています。

4　Baireのカテゴリー定理

Volterra 例で一般 Cantor 集合が出てくる必然性を考えてみます。大体、関数 $f(x)$ が原始関数を持つとき、$f(x)$ は Baire の高々第 1 級の関数で、その連続点は閉区間 $[a,b]$ の内で稠密にあることが知られています [4]。
今日の解析学の教科書では Baire のカテゴリー定理
完備距離空間の全空間は nowhere dense である部分集合の可算和で表す

ことは出来ない。
から説明されている。閉区間での連続関数全体のつくる関数空間に一様収束位相を入れたもの、これは完備距離空間をなしている。これに適用してでてきます。
もちろん Volterra には時期が逆ですからこの結果を知り様がありません。
Baire,Rene Louis(1874-1932).
問題の反例を作るには不連続の点集合の測度を真に正にして連続点の集合を稠密にとらねばなりません。だからある程度必然性はあるのです。

5

文献 Volterra [1] には全部で 4 節あって最初の第 1 節にいま述べた反例が書かれていました。Lebesgue もない,Baire もない, そのような時点で 21 才の青年 Volterra の出したするどい結果でした。
ところで反例はこのようなものに限られているのでしょうか？すなわち
予想
$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は存在するが $f(x)$ が Riemann 積分可能でないならば、$F(x)$ はある適当に作られた一般 Cantor 集合から考えられた上記の Volterra 型関数になっているのでしょうか？
また文献 Bruckner [2] にはつぎのような興味ある結果も記されていました。
定理
A を区間 I の任意の稠密 G_δ 部分集合とする。そのとき A を連続点の集合にし、$I-A$ を不連続点の集合にする導関数（任意の点で値をもつ）が存在する。
証明でも Volterra を引用しています。

この論稿への感想は電子メールで
koshiba@sci.kagoshima-u.ac.jp
にお送りください。とくに予想についての情報を期待しています。
表題に H.J.Smith の論文を名前に出しましたが、これは考え違いでした。H. J.Smith の論文は単に不連続関数の Riemann 積分可能でない例を追求したものでした。しかしながらこの講究録の表題も講演時の表題と同じものにしました。

参考文献

[1] Vito Volterra, Sui Principii del calcolo integrale,Giornale di Battaglini,19(1881),333-372

[2] Andrew M.Bruckner, Differentiation of Real Functions,Lecture Notes in Mathematics ,Vol.659,Springer-Verlag,45page,1978

[3] Henry J.Smith, On the Integration of Discontinuous Function,Proceedings of the London Mathematical Society,Ser.1 v.1-6 p.140-153 (1875)

[4] 一松 信, 解析学序説 (下), 裳華房, 新版,231 ページを参照,1982 年

[5] E.W.Hobson, The Theory of Functions of a real variable,Vol.1,second edition,461 ページを参照,1921 年

[6] Bernhard Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Fuction durch eine trigonometrische Reihe,Gesammelte Werke,Springer,1991, 全集の通しページで 273 ページを参照,